

Equations différentielles

Motivation

Poids $\vec{P} \Rightarrow P = mg$ force verticale .

Force de frottement \vec{F} . $F = -fmv$. $m =$ masse ; $f =$ coefficient frottement.

Principe fondamental de la mécanique :

$$\vec{P} + \vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad (\vec{a}: \text{accélération})$$

$\Rightarrow mg - fmv = ma \Rightarrow a = g - fv \Rightarrow \frac{dv}{dt} = g - fv(t)$ (relation de la vitesse avec sa dérivée partielle \Rightarrow Equation différentielle)

I. Introduction : définitions générales

Introduction

Une équation différentielle (ED) d'ordre n est une équation faisant intervenir une fonction y ainsi que ses dérivées $y^{(k)}$ jusqu'à l'ordre n .

Par exemple, une telle équation pourrait être $y'(t) = 2y(t)$ ou $y = \frac{1}{2}x^2y'' - 5x$. Dans le 2^{ème} exemple, il est sous-entendu que y est fonction de x .

Définition :

L'équation différentielle d'ordre n la plus générale peut toujours s'écrire sous la forme :

$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ Où F est une fonction de $(n+2)$ variables. Nous ne considérons que le cas où x et y sont à valeurs dans R .

Remarque :

On dit « intégrer l'ED » au lieu de « trouver une solution à l'ED ».

Equation différentielle à variables séparées :

Définition

Une ED de 1^{er} ordre est dite à variables séparées si elle peut s'écrire sous la forme :

$f(y) \cdot y' = g(x)$. Une telle ED peut s'intégrer facilement. On écrit $y' = \frac{dy}{dx}$, puis $f(y)dy = g(x)dx \Leftrightarrow \int f(y)dy = \int g(x)dx + c$ (On écrit ici explicitement la constante d'intégration arbitraire $c \in R$) qui est déjà implicitement présente dans les intégrales indéfinies pour ne pas l'oublier. Il s'agit donc d'abord de trouver des primitives F et G de f et de g , et ensuite d'exprimer y en termes de x (et de c).

Exemple : résoudre sur $I =]1, +\infty[$ l'ED $xy' \ln x = (3 \ln x + 1)y$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{3 \ln x + 1}{x \ln x} \Leftrightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{3 \ln x + 1}{x \ln x} dx + c \text{ avec } c \in R$$

$$\text{Soit } \frac{3 \ln x + 1}{x \ln x} = \frac{3}{x} + \frac{1}{x \ln x} \Rightarrow \ln|y| = 3 \ln|x| + \ln|\ln x| + c' = \ln|x^3 * \ln x| + c'$$

$$\text{D'où } y = c_2 x^3 \ln x \text{ avec } c_2 = \pm e^{c'}$$

II. Equations différentielles linéaires

1. Définitions :

On se concentre dans ce chapitre sur 2 types d'équations ; les équations différentielles linéaires du 1^{er} ordre et celles du 2^o ordre à coefficients constants.

- Une équation différentielle d'ordre n est linéaire si elle est de la forme :

(E): $a_0(x)y + a_1(x)y' + \dots + a_n(x)y^{(n)} = g(x)$ où les a_i et g sont des fonctions réelles continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

- Le terme linéaire \Leftrightarrow pas d'exposant pour les termes y, y', y'', \dots
- Une équation différentielle linéaire est homogène, ou sans second membre si la fonction g est la fonction nulle. (E) s'écrit $a_0(x)y + a_1(x)y' + \dots = 0$.
- Une équation différentielle linéaire est à coefficients constants si les fonctions a_i de (E) sont constantes. Les a_i sont constantes et g une fonction continue.

Exemple :

1. $y' + 5xy = e^x$ est une équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre avec 2^o membre.
2. $y' + 5xy = 0$ est l'équation différentielle homogène associée à l'exemple 1.
3. $2y'' - 3y' + 5y = 0$ est une équation différentielle du 2^o degré sans second membre.
4. $y'^2 - y = x$ ou $y'' \cdot y - y = 0$ ne sont pas des équations différentielles linéaires.

2. Equation différentielle linéaire du 1^{er} ordre

Elle est du type $y' = a(x)y + b(x)$. On va commencer par résoudre le cas où a est une constante et $b = 0$. Puis a sera une fonction et $b = 0$. Le 3^{ème} cas où a et b sont des fonctions.

a. $Y' = a(x)y$

Théorème

Soit a un réel et (E): $y' = ay$. Les solutions de (E) sur \mathbb{R} sont les fonctions y définies par $y(x) = ke^{ax}$ où $k \in \mathbb{R}$ une constante quelconque. En effet, $y' = ay \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = a$. Par intégration,

$\ln|y| = ax + b$. Par passage à l'exponentielle des deux côtés pour obtenir : $|y(x)| = e^{ax+b} \Rightarrow y(x) = \pm e^b e^{ax}$. Posons $k = \pm e^b$, on obtient les solutions non nulles.

Exemple :

$3y' - 5y = 0$. On écrit cette équation sous la forme $y' = \frac{5}{3}y$. Ses solutions sur

\mathbb{R} sont donc de la forme $y(x) = ke^{\frac{5}{3}x}$ où $k \in \mathbb{R}$.

Remarque :

L'équation différentielle (E) admet donc une infinité de solutions selon le choix de k . Les solutions sont multiples de la solution y_0 .

b. $Y' = a(x)y$

Théorème :

Soit $a: I \rightarrow R$ une fonction continue. Soit $A: I \rightarrow R$ une primitive de a . Soit l'équation différentielle $y' = a(x)y$ les solutions sont les fonctions définies par $y(x) = ke^{A(x)}$ où $k \in R$ est une constante quelconque.

Preuve :

$$\begin{aligned} y' = a(x)y &\Rightarrow \frac{y'}{y} a(x) \Leftrightarrow \ln|y(x)| = A(x) + b \Leftrightarrow |y(x)| = e^{A(x)+b} \Leftrightarrow y(x) \\ &= \pm e^b e^{A(x)} = ke^{A(x)} \text{ avec } k = \pm e^b \end{aligned}$$

Exemple

Soit $(E): x^2 y' = y$. Soit $I_- =] -\infty, 0[$ ou $I_+ =]0, +\infty[$ l'équation devient $y' = \frac{1}{x^2} y$. Donc $a(x) = \frac{1}{x^2}$ dont une primitive est $A(x) = \frac{-1}{x}$. Ainsi $y(x) = ke^{-1/x}$ où $k \in R$.

c. $Y' = a(x)y + b(x)$

Le cas d'une équation différentielle d'ordre 1 avec second membre $y' = a(x)y + b(x)$ (E) où $a: I \rightarrow R$ et $b: I \rightarrow R$ des fonctions continues.

L'équation homogène associée est : $y' = a(x)y$ (E_0).

Solution : principe de superposition. Les solutions de (E) s'obtiennent en ajoutant à une solution particulière de (E) les solutions de (E_0).

Proposition :

Si y_0 est une solution de (E) alors les solutions de (E) sont les fonctions $y: I \rightarrow R$ définies par $y(x) = y_0(x) + ke^{A(x)}$ avec $k \in R$ et $A(x)$ est une primitive de $a(x)$.

Par exemple, l'équation différentielle $y' = 2xy + 4x$ a pour solution particulière $y_0(x) = -2$ donc l'ensemble des solutions de cette équation est $y(x) = -2 + ke^{x^2}, k \in R$.

Recherche d'une solution particulière

Méthode de variation de la constante

Exemple : (E): $y' + y = e^x + 1$. L'équation homogène est $y' = -y$ dont les $y(x) = ke^{-x}, k \in R$. Cherchons une solution particulière avec la méthode de variation de la constante : on note $y_0(x) = k(x)e^{-x}$. On doit trouver $k(x)$ afin que y_0 vérifie l'équation différentielle $y' + y = e^x + 1$. $y'_0 + y_0 = e^x + 1 \Leftrightarrow (k'(x)e^{-x} - k(x)e^{-x}) + k(x)e^{-x} = e^x + 1 \Leftrightarrow k'(x)e^{-x} = e^x + 1 \Leftrightarrow k'(x) = e^{2x} + e^x \Leftrightarrow k(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + e^x + c$. Fixons $c = 0$.

$y_0(x) = (\frac{1}{2}e^{2x} + e^x)e^{-x}$. La solution particulière est $y_0(x) = \frac{1}{2}e^x + 1$

Les solutions générales de (E) sont donc : $y(x) = \frac{1}{2}e^x + 1 + ke^{-x}, \forall k \in R$.

Théorème de Cauchy :

Soit $y' = a(x)y + b(x)$ une équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre où $a, b: I \rightarrow R$ sont des fonctions continues sur un intervalle I . Alors, pour tout $x_0 \in I$ et pour tout $y_0 \in R$ il existe une et une seule solution y telle que $y(x_0) = y_0$.

Exemple :

Trouvons la solution de (E) $y' + y = e^x + 1$ tel que $y(1) = 2$. On a

$$y(x) = \frac{1}{2}e^x + 1 + ke^{-x}, \forall k.$$

$$y(1) = 2 \Leftrightarrow y(x) = \frac{1}{2}e + 1 + ke^{-1} = 2 \Leftrightarrow \frac{k}{e} = 2 - \frac{1}{2}e - 1 = 1 - \frac{1}{2}e$$

$$\Leftrightarrow k = e - \frac{e^2}{2}$$

Ainsi, $y(x) = \frac{1}{2}e^x + 1 + (e - \frac{e^2}{2})e^{-x}$

Méthode de détermination de la solution particulière

Dans certains cas de second membre bien particulier, quand a est une fonction constante, on peut se dispenser de la méthode de variation de la constante, et chercher directement une solution particulière d'une forme pas trop compliquée :

- L'équation $y' + ay = P(x)$ où a est constante et P est un polynôme de degré n admet une solution particulière polynomiale de degré n .
- L'équation $y' + ay = P(x)e^{kx}$ où a est constante et P est un polynôme de degré n admet une solution particulière de la forme $y_p(x) = Q(x)e^{kx}$, où Q est un polynôme de degré n si $a + k \neq 0$ de degré $n + 1$ sinon.
- L'équation $y' + ay = \alpha \cos(wx) + \beta \sin(wx)$ où a est une constante et $w \in R$, admet une solution particulière de la forme $\gamma \cos(wx) + \delta \sin(wx)$

Courbes intégrales

C'est le graphe défini par : $y = \varphi(x)$

(φ une solution de l'équation différentielle ED)

Exemple :

1. Résoudre $x + yy' = 0$. On écrit l'ED sous la forme $y' = \frac{-x}{y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y} \Rightarrow$

$$ydy = -x dx$$

Par intégration :

$$\int y dy = \int -x dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{-x^2}{2} + k \quad (k = cte)$$

Pour $k > 0 \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = k$ donc $\varphi(x)$ sont des cercles.

Donc pour chaque point (x_0, y_0) passe une et une seule courbe intégrale.

2. Soit (E) : $y' + y = x$ les solutions sont $y(x) = x - 1 + ke^{-x}$, $k \in R$

3. Equation différentielle linéaire du 2^{ème} ordre

On appelle équation différentielle du second ordre toute relation entre :

- Une variable x
- Une fonction de x notée $y(x)$
- La dérivée première $y'(x)$
- La dérivée seconde $y''(x)$

Exemple :

$y(x).y''(x) = y'(x)y^3(x) - x^2 = \ln x$ est une équation différentielle du second ordre.

On appelle équation différentielle linéaire du second ordre une équation différentielle de la forme : $a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = f(x)$ où $a(x), b(x), c(x)$ et $f(x)$ sont des fonctions connues de x et où $y(x)$ est la fonction de x à déterminer.

Exemples :

1. $3x^2y''(x) - \ln(x)y(x) = e^x$
2. $3x^2y''(x) - \frac{1}{x}y'(x) - y(x) = e^x$
3. $x^2y''(x) + y'(x) - y^2(x) = x^2$

On appelle équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants une équation différentielle linéaire du second ordre tel que $a(x), b(x)$ et $c(x)$ soient des constantes.

Exemple :

$3y''(x) - 2y'(x) + 4y(x) = x - 2$ est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

Equation sans second membre

L'équation homogène associée à $ay'' + by' + cy = f(x)$ est l'équation $ay'' + by' + cy = 0$.

Résoudre ou intégrer ?

On résout l'équation sans second membre $ay'' + by' + cy = 0$ on cherche s'il existe des solutions $y(x)$ ayant la même forme que celles des équations homogènes associées aux équations différentielles du 1^{er} ordre, c'est-à-dire de la forme $y(x) = e^{rx}$ où r un coefficient réel. Donc on a $y'(x) = re^{rx}$ et $y''(x) = r^2e^{rx}$. En remplaçant dans l'équation $ay'' + by' + cy = 0$ on trouve : $ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0 \Rightarrow$ l'équation caractéristique associée est $ar^2 + br + c = 0$ ($e^{rx} \neq 0$).

Théorème :

1. Si les racines de l'équation caractéristique r_1 et r_2 sont réelles et distinctes, alors la solution $y_H(x) = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$; $A, B \in R$.
2. Si les solutions sont réelles et confondues ($r_1 = r_2$) alors $y_H(x) = (Ax + B)e^{r_1x}$; $A, B \in R$.
3. Si les racines de l'équation caractéristique r_1 et r_2 sont complexes et conjuguées ($r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$) alors $y_H(x) = (A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x))e^{\alpha x}$; $A, B \in R$.

Exemple :

Soit l'équation différentielle $y'' + 4y' + 4y = 0$ avec

$y(-1) = 1$ et $y'(-1) = 2$

Solution homogène : $y''_H + 4y'_H + 4y_H = 0$

L'équation caractéristique est : $r^2 + 4r + 4 = 0$, $\Delta = 16 - 16 = 0$.

$r = -2 \Rightarrow y_H(x) = (Ax + B)e^{-2x}$, $A, B \in \mathbb{R}$

Résolution de l'équation différentielle avec 2° membre :

Théorème :

La solution générale $y(x)$ de l'équation $ay'' + by' + cy = f(x)$ est la somme $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ où :

- y_h est la solution homogène
- y_p est la solution particulière

Second membre usuel

Propriété : quand le second membre se présente sous l'une des formes usuelles, alors cette équation différentielle admet une solution particulière $y_p(x)$ de la même forme que le second membre $f(x)$.

1. $f(x) = P(x)$ de degré n

Solution particulière $y_p(x) = Q(x)$

- $c \neq 0 \Rightarrow \deg(Q) = n$
- $c = 0, b \neq 0 \Rightarrow \deg(Q) = n + 1$
- $c = 0, b = 0 \Rightarrow \deg(Q) = n + 2$

2. $f(x) = P(x)e^{sx}$, $\deg(P) = n$, $s \in \mathbb{R}$

$y_p(x) = Q(x)e^{sx}$ tel que :

- s n'est pas racine de l'équation caractéristique $\Rightarrow \deg(Q) = n$
- s une racine simple $\Rightarrow \deg(Q) = n + 1$, $\text{val}(Q) = 1$
- s une racine double $\Rightarrow \deg(Q) = n + 2$, $\text{val}(Q) = 2$

3. $f(x) = \alpha \cos(wx + \varphi) + \beta \sin(wx + \varphi)$

- Si iw n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution sous la forme :
 $y_p(x) = A \cos(wx + \varphi) + B \sin(wx + \varphi)$
- Si iw est racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution sous la forme :
 $y_p(x) = Ax \cos(wx + \varphi) + Bx \sin(wx + \varphi)$

Remarque :

La valuation d'un polynôme P est le plus petit indice d'un coefficient non nul de P . Exemple : $P(X) = X^4 + 3X^2 + 4$ donc $\text{val}(P) = 0$.

Applications :

Résoudre les équations différentielles :

$$(E_0): y'' - 5y' + 6y = 0$$

$$(E_1): y'' - 5y' + 6y = 4xe^x$$

$$(E_2): y'' - 5y' + 6y = 4xe^{2x}$$

