# Fonctions réelles d'une variable réelle : limite, continuité, fonctions équivalentes

## I. Définition :

Une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles est une application $f: U \to \mathbb{R}$ où $U$ est le domaine de définition de $f$.

Exemple : La fonction $\begin{array}{l} f: ]-\infty,0[\cup]0,+\infty[\to\mathbb{R} \\ x\to\frac{1}{x} \end{array}$ est la fonction inverse, son graphe

$G = \{x, f(x)/x \in U\}$ où $U = D_f$

## II. Opérations sur les fonctions :

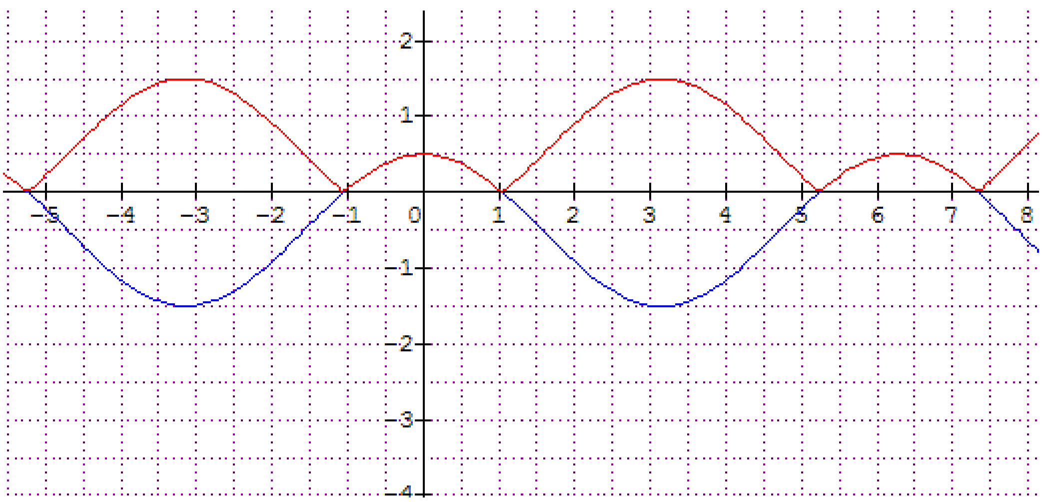
Soient $f: U \to \mathbb{R}$ et $g: U \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur une même partie $U$ de $\mathbb{R}$. On peut alors définir les fonctions suivantes :

- La somme de $f$ et $g$ est la fonction $f + g: U \to \mathbb{R}$ définie par $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ pour tout $x \in U$.
- Le produit de $f$ et $g$ est la fonction $f * g: U \to R$ définie par $(f * g)(x) = f(x) * g(x)$ pour tout $x \in U$.
- La multiplication par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ de $f$ est la fonction $\lambda f: U \to \mathbb{R}$ définie par $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ pour tout $x \in U$.

## III. Fonctions majorées, minorées, bornées

a. Définition

- $f$ est constante sur $U$ si $\exists\alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in U / f(x) = \alpha$
- $f$ est dite nulle sur $U$ si $\forall x \in U, f(x) = 0$
- Soit $f: U \to \mathbb{R}$ une fonction, on dit que :
  - ➢ $f$ est majorée sur $U$ si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in U, f(x) \le M$
  - ➢ $f$ est minorée sur $U$ si $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in U, f(x) \ge m$
  - ➢ $f$ est bornée sur $U$ si $f$ est à la fois majorée et minorée sur $U$, c'est-à-dire $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in U,\ |f(x)| \le M$




## IV. Fonctions croissantes, décroissantes

Définition

$f: U \to \mathbb{R}$ une fonction

- $f$ est croissante sur $U$ si $\forall\ x, y \in U, x \leq y \ \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
- $f$ est décroissante sur $U$ si $\forall\ x, y \in U, x \geq y \ \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
- $f$ est monotone sur $U$ si $f$ est (strictement) croissante ou décroissante sur $U$.

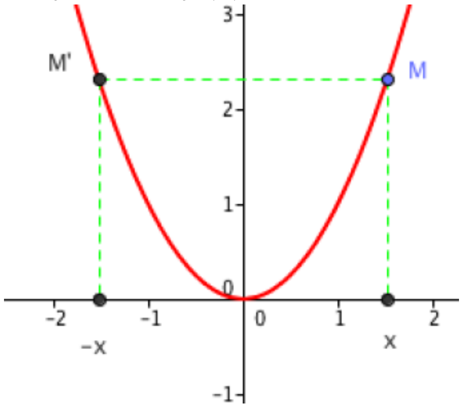
  Exemple :
  - $f(x) = \sqrt{x}$ , $g(x) = \exp(x)$ sont strictement croissantes.
  - $e(x) = |x|$ n'est ni croissante ni décroissante sur $\mathbb{R}$.

V. Parité et périodicité

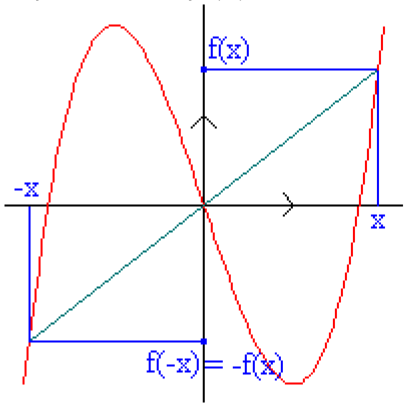
Définition

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0 ($[-a, a]$ou $\mathbb{R}$). $f: I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $I$. On dit que :

- $f$ est paire si $\forall x \in I \quad f(-x) = f(x)$

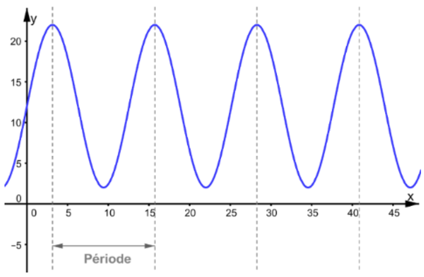



- $f$ est impaire si $\forall x \in I \quad f(-x) = -f(x)$




Définition

Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $T$ un nombre réel, $T > 0$. La fonction $f$ est dite périodique de période $T$ si $\forall x \in R, f(x+T) = f(x)$



Limites :

Définitions

Limite en un point

Soit $f: I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$. $x_0 \in \mathbb{R}$

Définition : soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que $f$ a pour limite $l$ en $x_0$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

On dit que $f(x)$ tend vers $l$ lorsque $x$ tend vers $x_0$. On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$

Définition

- On dit que $f$ a pour limite +∞ en $x_0$ si $\forall A > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I$ :
  $|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > A$. On note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$
- On dit que $f$ a pour limite -∞ en $x_0$ si $\forall A > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I$ :
  $|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -A$. On note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$
- On dit que $f$ a pour limite +∞ en +∞ si $\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in I$ :
  $x > B \Rightarrow f(x) > A$.

  Exemple :

  Pour $n \geq 1$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \begin{matrix} +\infty, & n\, pair \\ -\infty, & n\, impair \end{matrix}$

  $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

  Limite à gauche et à droite :

  Définition :

- On appelle limite à droite en $x_0$ $de\ f$ la limite de la fonction $f$ en $x_0$ et on la note $\lim\limits_{x_0^+} f$.
- On définit de même la limite à gauche en en $x_0$ de $f$ et on la note $\lim\limits_{x_0^-} f$.

  Propriétés :

- Si $\lim\limits_{x_0} f = l$ et $\lim\limits_{l} g = l'$ alors $\lim\limits_{x_0} g \circ f = l'$
- Si $f \leq g$ et $\lim\limits_{x_0} f = l$ et $\lim\limits_{x_0} g = l'$ alors $l \leq l'$
- Si $f \leq g$ et si $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$ alors $\lim\limits_{x_0} g = +\infty$

  Théorème des gendarmes :

  Si $f \leq g \leq h$ et si $\lim\limits_{x_0} f = \lim\limits_{x_0} h = l \in R$, alors $g$ a une limite en $x_0$ et $\lim\limits_{x_0} g = l$.

  Continuité en un point

  Définition

  On dit que $f$ est continue en un point $x_0 \in \mathbb{R}$ si :

  $\forall \mathcal{E} > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ . C'est-à-dire $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

  Exemple :

- Une fonction constante sur un intervalle.
- La fonction racine carrée $x \longrightarrow \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$
- Les fonctions $sin$ et $cos$ sur $\mathbb{R}$
- La fonction valeur absolue $x \longrightarrow |x|$ sur$\mathbb{R}$

- La fonction exponentielle $exp$ sur $\mathbb{R}$.
- La fonction logarithme $ln$ sur $\mathbb{R}$

Par contre, la fonction partie entière $E$ n'est pas continue aux points $x_0 \in \mathbb{Z}$.

Proposition :

Soient $f, g: I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues en un point $x_0 \in I$. Alors :

$\lambda. f\ est\ continue\ en\ x_0.$

$f + g\ est\ continue\ en\ x_0.$

$f * g\ est\ continue\ en\ x_0.$

Si $f(x_0) \neq 0$ alors $\frac{1}{f}$ est continue en $x_0$.

Prolongement par continuité :

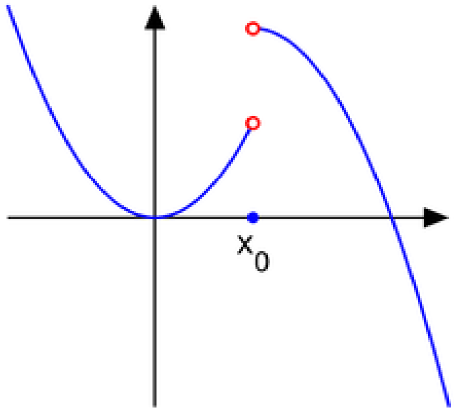
Définition :

Soit I un intervalle, $x_0$ un point de $I$ et $f: I\backslash\{x_0\} \to \mathbb{R}$ une fonction.

On dit que $f$ est prolongeable par continuité en $x_0$ si $f$ admet une limite finie en $x_0$. Alors $\lim_{x_0} f = l$.

On définit alors la fonction $\bar{f}: I \to \mathbb{R}$. $\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq x_0 \\ l & x = x_0 \end{cases}$

Alors $\bar{f}$ est continue en $x_0$ et on l'appelle le prolongement par continuité de $f$ en $x_0$.

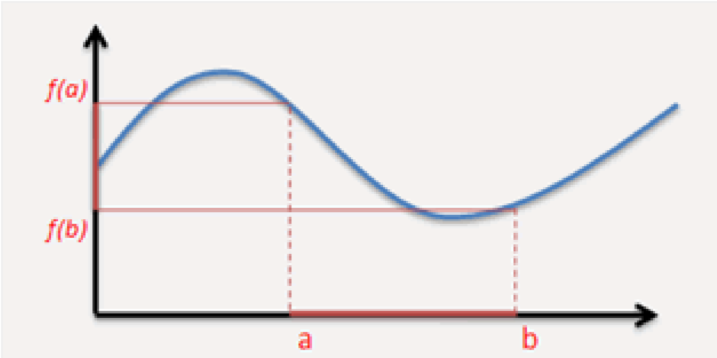



Continuité sur un intervalle

Le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème

Soit $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment. Pour tout réel $y$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe $c \in [a, b] / f(c) = y$.



Fonctions monotones et bijections

Rappels : injection, surjection et bijection

Définition : soit $f: E \rightarrow F$ une fonction où $E$ et $F$ sont des parties de $\mathbb{R}$

- $f$ est injective si $\forall x, x' \in E / f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$
- $f$ est surjective si $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$
- $f$ est bijective si $f$ est à la fois injective et surjective. C'est-à-dire si $\forall y \in F, \exists!\, x \in E, y = f(x)$

Proposition :

Si $f: E \rightarrow F$ est une fonction bijective alors il existe une unique application $g: F \rightarrow E$ tel que $g \circ f = id_E$ et $f \circ g = id_F$. La fonction $g$ est la bijection réciproque de $f$ et se note $f^{-1}$.

Remarque :

- $id_E: {}^{E \rightarrow E}_{x \rightarrow x}$
- $g \circ f = id_E \Leftrightarrow \forall x \in E, g\big(f(x)\big) = x$
- $f \circ g = id_F \Leftrightarrow \forall y \in F, f\big(g(y)\big) = y$
- Dans un repère orthonormé, $f$ et $f^{-1}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice $(y = x)$

Fonctions monotones et bijections

Théorème de la bijection :

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle $I\ de\ \mathbb{R}$. Si $f$ est continue et strictement monotone sur $I$ alors :

1. $f$ établit une bijection de l'intervalle I dans $J = f(I)$.
2. $f^{-1}: J \rightarrow I$ est continue et strictement monotone et a le même sens de variation de $f$.

   Exemple :

   Soit $f(x) = x^2$. La fonction $f$ n'est pas strictement monotone sur $\mathbb{R}$. Cependant, en restreignant son ensemble de définition à $]-\infty, 0]$ d'une part et à $[0, +\infty[$ d'autre part, on définit deux fonctions strictement monotones.

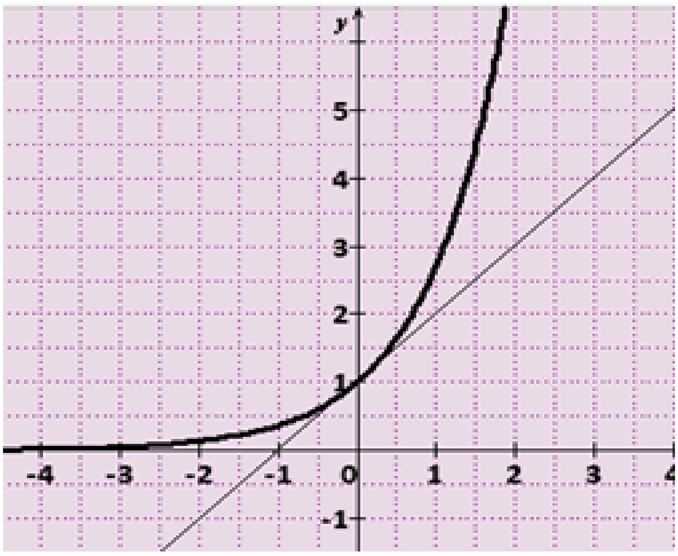
   $f_1: {}^{]-\infty,0] \rightarrow [0,+\infty[}_{x \rightarrow x^2}$ et $f_2: {}^{[0,+\infty[ \rightarrow [0,+\infty[}_{x \rightarrow x^2}$

On remarque que $f(]-\infty, 0]) = f[0, +\infty[) = [0, +\infty[$. Les fonctions $f_1$ et $f_2$ sont des bijections. Déterminons leurs fonctions réciproques $f_1^{-1}: [0, +\infty[ \rightarrow ]-\infty, 0]$ et $f_2^{-1}: [0, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$. $y = f(x) \Leftrightarrow y = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y}\ ou\ x = -\sqrt{y}$. D'où $f_1^{-1}(y) = -\sqrt{y}\ et\ f_2^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

# Fonctions usuelles

1. Logarithme et exponentielle :
    a. Logarithme
    Proposition :
    Il existe une unique fonction, notée $ln$: $]0,+\infty] \to \mathbb{R}$ tel que : $ln'(x) = \frac{1}{x}$ (pour tout $x > 0$) et $\ln(1) = 0$. De plus :
    - $\ln(a * b) = \ln a + \ln b$
    - $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
    - $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
    - $\ln(a^n) = n\ln(a) \quad (pour\ tout\ n \in N)$
    - $ln$ est une fonction continue strictement et définit une bijection de $]0,+\infty[\ sur\ \mathbb{R}$.
    - $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 = \frac{\ln(1+x) - \ln(1+0)}{1+x-1} = ln'(1)$

Remarque : $\ln x$ s'appelle le logarithme naturel ou aussi logarithme népérien
Il est caractérisé par $\ln(e) = 1$. On définit le logarithme en base $a$ par $log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$. De sorte que $log_a(a) = \frac{\ln(a)}{\ln(a)} = 1$.
Exponentielle :
Définition :
La bijection réciproque de $ln$: $]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ s'appelle la fonction exponentielle notée $exp$: $\mathbb{R} \longrightarrow: ]0,+\infty[$




a. Exponentielle
Proposition :
La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes :
- $\exp(\ln x) = x$ pour tout $x > 0$ et $\ln(\exp x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- $\exp(\mathrm{a}+\mathrm{b})=\exp(\mathrm{a}) * \exp(\mathrm{b})$
- $\exp(nx)=(\exp x)^n$
- $\exp: \mathbb{R} \rightarrow ]0,+\infty[$ est une fonction continue, strictement croissante vérifiant $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \exp x=0$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \exp x=+\infty$
- La fonction exponentielle est dérivable et $exp'x=\exp x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. Puissance et comparaison

Par définition, pour $a>0$ et $b \in \mathbb{R}$. $a^b=\exp(b \ln a)$

Propriétés :

Branches infinies :

- $\lim\limits_{x \rightarrow x_0} f(x)=\pm\infty \Rightarrow x=x_0\ est\ une\ asymptôte\ verticale.$
- $\lim\limits_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)=l \Rightarrow y=l\ est\ une\ asymptôte\ horizontale.$
- $\lim\limits_{x \rightarrow +\infty} f(x)=+\infty \Rightarrow calculer\ \lim\limits_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$
  - $\lim\limits_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}=0\ branche\ parabolique\ de\ direction\ (ox)$
  - $\lim\limits_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}=+\infty\ branche\ parabolique\ de\ direction\ (oy)$
  - $\lim\limits_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}=a \neq 0,\ calculer\ \lim\limits_{x \rightarrow +\infty}(f(x)-ax)$
    - $\lim\limits_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}=\pm\infty$ branche parabolique de direction $y=ax$
    - $\lim\limits_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}=b$ branche parabolique de direction $y=ax+b$