

Fonctions à deux variables

1. Introduction :

Définition 1 :

Une fonction à deux variables est une application $f: D \rightarrow R$ où D est un sous ensemble du plan R^2 appelé domaine de définition de la fonction f .

Exemples :

La fonction $f: (x, y) \rightarrow x^3 + 2x^2y + xy^3 - 4y^2$ est une fonction à deux variables définies sur R^2 . La fonction $g(x, y) = \ln(x + y - 1)$ est une fonction définie sur l'ensemble des couples (x, y) vérifiant $x + y - 1 > 0$. La fonction $h(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ est définie à l'intérieur du cercle de centre 0 et de rayon 2 ($4 - x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 4$).

Définition 2 :

La surface représentative d'une fonction à deux variables dans un repère $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ vérifiant $z = f(x, y)$.

Remarque :

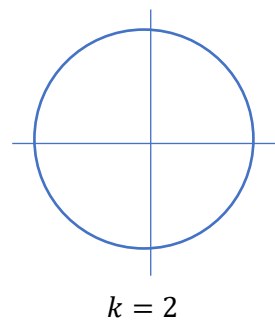
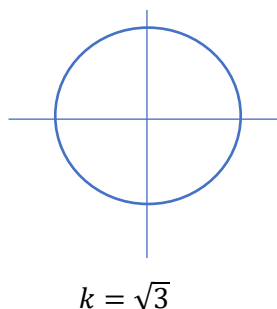
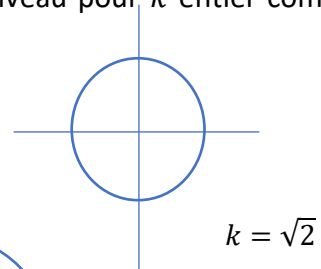
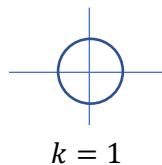
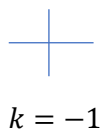
Une fonction à deux variables n'est donc pas représentée par une courbe. Il est très difficile en général de visualiser ce genre de représentations graphiques, c'est pourquoi on est souvent réduit à étudier les coupes de la surface par des plans simples.

Définition 3 : courbes de niveau

Soient k un réel et f une fonction de deux variables, la ligne de niveau k de la fonction f est l'ensemble de couples (x, y) vérifiant $f(x, y) = k$.

Exemple :

Considérons la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$, sa ligne de niveau k est définie par l'équation $x^2 + y^2 = k$. Il s'agit donc du cercle de centre 0 et de rayon \sqrt{k} quand k est positif, la ligne de niveau est vide sinon. Voici une représentation des lignes de niveau pour k entier compris entre -1 et 4.



Remarque :

Les applications partielles sont donc données par la même équation que f , seul le statut de x et y change : au lieu d'avoir deux variables, l'une d'elles est fixée. Par exemple, si $f(x, y) = x^2 - 3xy + y^3$, on dit que l'application partielle obtenue en fixant $y=1$ est la fonction d'une variable $f(x) = x^2 - 3x + 1$.

2. Limite et continuité

Définition

Soit A une partie de R^2 , f est une application de A dans R et $a \in A$. On dit que f tend vers $l \in R$ en a ou admet l pour limite en a si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \mu > 0, \forall u \in A, \|u - a\| \leq \mu \Rightarrow |f(u) - l| \leq \varepsilon$$

Le réel l est alors unique et on le note $l = \lim_{u \rightarrow a} f(u)$.

Définition :

Soit A une partie de R^2 , f une fonction définie sur A et $a \in A$. On dit que f est continue en a si et seulement si f admet une limite en a (qui est $f(a)$).

Proposition :

Soit A une partie et $a \in A$. Soit $f: A \rightarrow R$. S'il existe deux réels $k \geq 0$ et $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall u \in A\{a\}; |f(u) - f(a)| \leq k\|u - a\|$$

Alors f est continue en a .

Remarque :

Pour démontrer la continuité d'une fonction de deux variables en $(0,0)$, on se sert souvent des inégalités suivantes valables pour tous réels x, y :

$$\begin{cases} |x| \leq \|(x, y)\| \\ |y| \leq \|(x, y)\| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 \leq \|(x, y)\|^2 \\ y^2 \leq \|(x, y)\|^2 \\ |xy| \leq \|(x, y)\|^2 \end{cases}$$

Rappel :

On rappelle que la continuité de f en x_0 consiste à vérifier si la limite existe de f en x_0 et la calculer. Et voir si $\lim_{x_0} f = f(x_0)$.

Pour les fonctions à plusieurs variables, la continuité en (x_0, y_0) est équivalente à toute restriction de f à courbes continues qui passent par le point (x_0, y_0) est continue en (x_0, y_0) .

Donc, une stratégie pour prouver qu'une fonction f n'est pas continue au point (x_0, y_0) est trouver deux courbes continues et qui conduisent à deux valeurs différentes de la limite.

Théorème des gendarmes :

1. Soient f, g et h trois fonctions de A dans R vérifiant l'inégalité $g(M) \leq f(M) \leq h(M)$ pour tout $M \in A$. Soit M_0 un point en lequel les limites de g et h existent et sont égales à un même réel l . Alors la limite de f en M_0 existe et vaut l .
2. $|f(M)| \leq g(M)$ avec g tend vers 0, donc f tend vers 0.

Définition :

Soit A une partie de R^2 . On dit qu'une fonction de deux variables est continue sur A si et seulement si elle est continue en tout point A

Exemple :

Les fonctions affines de la forme $f : (x, y) \rightarrow ax + by + c$ sont continues sur R^2 .

Dérivées partielles :

Pour une fonction de deux variables il y'a deux dérivées, une par rapport à x et l'autre par rapport à y.

Calcul de la première dérivée partielle :

Pour calculer la première dérivée partielle, on considère y comme un paramètre et on dérive comme d'habitude.

Exemple :

1. $f(x, y) = xy + y^2 + \cos(xy)$

On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y - y \sin(xy)$

2. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(xy^2 - y + e^{xy})$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y^2 + ye^{xy}$$

Le gradient :

Si on met les deux dérivées partielles ensemble, on obtient le gradient de f, qu'on note ∇f :

$$\nabla f: R^2 \rightarrow R^2$$

$$(x, y) \rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)$$

Exemple :

1. Posons $f(x, y) = xy + y^2$. On a : $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + 2y$. Le gradient de f au point (3,10) est donc (10,23).

2. Calculer le gradient de $f(x, y) = xe^y - 3yx^2$ en (1,1).

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^y - 6yx \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = xe^y - 3x^2$$

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (e-6, e-3)$$

Points critiques :

Pour une fonction à une variable, elle est dérivable et sa dérivée s'annule. On dit que la fonction atteint ses bornes supérieure et inférieure. A deux variables, c'est pareil, sauf que la dérivée est remplacée par le gradient.

Définition :

Les points critiques d'une fonction f de deux variables sont les points où son gradient s'annule.

Exemple :

1. $f(x, y) = x^3 - 3x + y^2$. Cherchons ses points critiques :

$$\nabla f = (0,0) \Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (0,0) \Rightarrow (3x^2 - 3, 2y) = (0,0) \Rightarrow x^2 = 1 \text{ et } y = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1 \text{ et } y = 0$$

Les deux points critiques sont (1,0) et (-1,0).

2. $f(x, y) = x^2 - 4x + y^3 - 3y$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (0,0) \Rightarrow (2x - 4, 3y^2 - 3) = (0,0) \Rightarrow x = 2 \text{ et } y^2 = 1 \Rightarrow x = 2 \text{ et } y = 1 \text{ ou } y = -1$$

Les deux points critiques sont $(2,1)$ et $(2,-1)$.

Calcul différentiel :

Définition :

Si les applications $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues, on dit que la fonction f est de classe C^1 .

Théorème :

Soit f une fonction de classe C^1 ($\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues) et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Alors il existe un voisinage de (x_0, y_0) et une fonction ε définie sur ce voisinage tel que pour tout (x, y) :

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \varepsilon(x, y) \text{ et } \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} \varepsilon(x, y) = 0$$

Cette égalité s'appelle le développement limité d'ordre 1 de f en (x_0, y_0) .

Définition :

Soit f une fonction de classe C^1 . L'application $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$ s'appelle la différentielle de f en (x_0, y_0) .

Exprimer la différentielle $f(x, y) = x^2 y^3$

Définition :

Lorsque f admet deux dérivées partielles d'ordre 1 $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ ces deux fonctions sont des fonctions de deux variables et donc peuvent admettre elles-mêmes des dérivées partielles d'ordre 1. On appelle ces dérivées les dérivées partielles d'ordre 2 de f .

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Définition :

Si f est de classe C^1 et si ses dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont aussi de classe C^1 , alors on dit que f est de classe C^2 .

Théorème : Schwarz

Si f est une fonction de classe C^2 alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ (dérivées secondes croisées)

Théorème : Extremums

Si f admet un extremum local en (x_0, y_0) alors (x_0, y_0) est un point critique de f .

Attention : la réciproque n'est pas toujours vraie. Il peut exister des points critiques qui ne sont pas des extremums locaux.

En pratique :

Lorsqu'on cherche les extremums d'une fonction on commence tout d'abord par chercher ses points critiques car on sait que les extremums seront parmi ces points.

Mise en place :

On suppose que f est une fonction de classe C^2 et (x_0, y_0) un point critique de

f ($\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$). On pose :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \text{ et } t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0).$$

Le DL d'ordre 2 en (x_0, y_0) s'écrit donc :

Posons $h = x - x_0, k = y - y_0$

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2} h^2 r + hks + \frac{1}{2} k^2 t + (h^2 + k^2) \varepsilon(x, y)$$

Alors nous devons étudier le signe du trinôme $h^2 r + 2hks + k^2 t$

On pose $P = k^2 \left(\frac{h^2}{k^2} r + 2 \frac{h}{k} s + t \right)$ et soit $X = \frac{h}{k}$

$Q(X) = rX^2 + 2sX + t$. Etudions son signe. Soit le discriminant $\Delta = 2\sqrt{s^2 - rt}$

- Si $s^2 - rt < 0 \Rightarrow$ signe de r
 - Si $r > 0 \Rightarrow f(x, y) - f(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow f(x, y) > f(x_0, y_0) \Rightarrow f(x_0, y_0)$ est un minimum local.
 - Si $r < 0 \Rightarrow f(x_0, y_0)$ est un maximum local.
- Si $s^2 - rt > 0 \Rightarrow f$ n'admet pas d'extremum local.
- Si $s^2 - rt = 0 \Rightarrow$ on ne peut rien dire.

Exemple :

Soit $f(x, y) = 3xy - x^3 - y^3$. Cherchons à déterminer les extremums locaux de f .

Trouvons les points critiques :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y - 3x^2 = 0 \\ 3x - 3y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x = x^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x(1 - x^3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x = 0 \text{ ou } x = 1 \end{cases} \Rightarrow (0,0) \text{ et } (1,1) \text{ sont les deux points critiques.}$$

Etude des extremums :

D'après le théorème des extremums, on sait que ces derniers existent parmi les points critiques déterminés.

- (0,0) :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3y - 3x^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x - 3y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -6x = r \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -6y = t \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 3 \end{cases}$$

Pour le point critique (0,0), le discriminant $s^2 - rt = 9 > 0$. Donc on conclut que le point (0,0) n'est pas un extremum local.

- (1,1) :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = -6 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = -6 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = 3 \end{cases}$$

Pour le point critique (1,1), le discriminant $s^2 - rt = -27 < 0$. Or $r = -6 < 0$. On conclut que $f(x, y) < f(1,1)$. Le point $f(1,1)$ est un maximum local.