Pr. Meryam BENABDOUALLAH

Fonctions trigonométriques et hyperboliques réciproques

I. Quelques formules de trigonométrie

1. Identité remarquable

$$cos^2x + sin^2x = 1; x \in R$$

2. Périodicité

$\cos(x + 2k\pi) = \cos x;\ \ (x \in R\ et\ k \in Z)$
$\sin(x + 2k\pi) = \sin x;\ \ (x \in R\ et\ k \in Z)$
$\tan(x + k\pi) = \tan x;\ \ x \neq \dfrac{(2m+1)\pi}{2}\ \ \ (m, k\ \epsilon Z)$

3. Domaine de définition

$cos: R \to [-1,1]$
$sin: R \to [-1,1]$
$tan: R\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi/k\epsilon Z\} \to R$

4. Relations remarquables

$\cos(-x) = \cos(x)\ \ \ /\ \ (x \in R)$
$\sin(-x) = -\sin(x)\ \ /\ \ (x \in R)$
$\tan(-x) = -\tan(x)\ \ /\ \left(x \neq \frac{(2m+1)\pi}{2}, m \in Z\right)$
$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x\ \ \ \ et\ \ \ \ \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
$\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \dfrac{1}{\tan x};\ \ (x \neq 2m\pi\ \ \ et\ \ \ m \in Z)$
$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$
$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$
$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$
$\tan(x + y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$
$\tan(x - y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$

Formules de duplication :

$\cos(2x) = cos^2x - sin^2x = 2cos^2x - 1 = 1 - 2sin^2x$
$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$
$\tan(2x) = \dfrac{2 \tan x}{1 - tan^2x}$

Quelques valeurs remarquables :

- $Cos\ 0 = 1\ ;\ cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}; \cos\frac{\pi}{2} = 0$
- $\sin 0 = 0; \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}; \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \sin\frac{\pi}{2} = 1$
- $\tan 0 = 0; \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \tan\frac{\pi}{4} = 1; \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

Identité d'Euler :

$e^{ix} = \cos x + i \sin x;\ x \in R$

Fonctions trigonométriques réciproques

1. Arc cosinus :

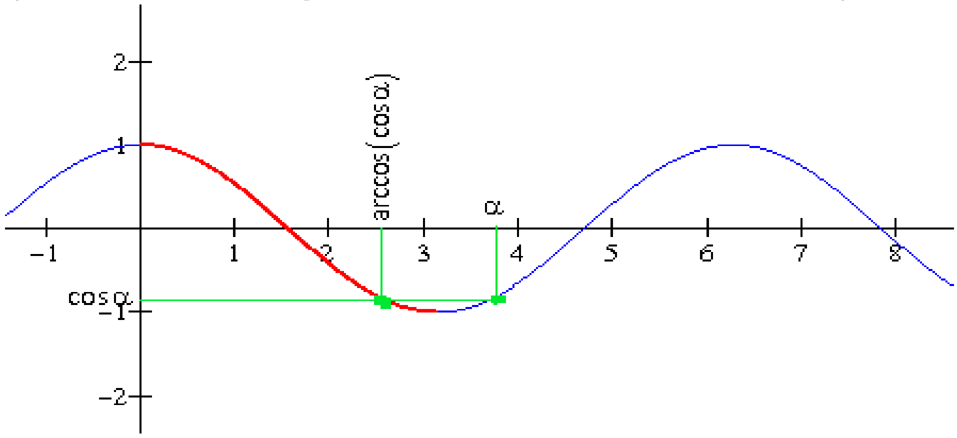
La fonction $cos: R \to [-1,1]$ est surjective mais pas injective entant que fonction périodique. Mais si on considère la restriction du cosinus à l'intervalle $[0,\pi]$ cette fonction devient aussi injective et donc bijective. Sa fonction réciproque s'appelle arc cosinus. Par définition :

$arccos: [-1,1] \to [0,\pi]$

$$y \to \text{"}la\ seule\ solution\ x \in [0,\pi]\ de\ l'équation\ \cos\ \ x = y\text{"}$$

On a donc que :

$\arccos y = \text{"}le\ seul\ arc\ compris\ entre\ 0\ et\ \pi\ dont\ le\ cosinus\ vaut\ y\text{"}.$



Par construction :

$\arccos(\cos x) = x;\ \forall x \in [0,\pi]$ et $y = \cos\,(\arccos y)\ \ \forall y \in [-1,1]$.

Exemple 1 :

$Arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}\ car\ \frac{\pi}{3}\ est\ l'angle\ dont\ le\ cosinus\ vaut\ \frac{1}{2}$ et $0 < \frac{\pi}{3} < \pi$

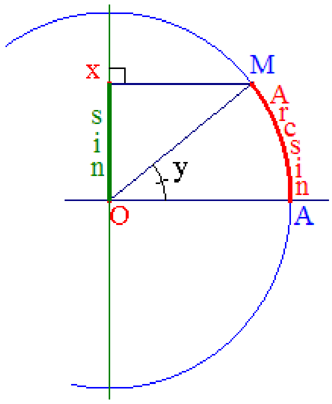
Exemple 2 :

$$\arccos\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) = \frac{5\pi}{6}$$

Comme $\frac{7\pi}{6} \notin [0,\pi]$ or $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)\ et\ \frac{5\pi}{6} \epsilon [0,\pi]$ d'où la réponse.

2. Arc sinus :

La fonction $sin: R$ →[-1,1] est surjective mais pas injective. Si on considère la restriction du sinus à l'intervalle $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, cette fonction devient aussi injective et donc bijective. Sa fonction réciproque s'appelle arc sinus donc on a :



$arcsin: [-1,1] \rightarrow \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$y \rightarrow$ "*La seule solution* $\frac{-\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ *de l'équation* $\sin x = y$".

Par définition, on peut dire :

$Arcsin\ y =$ « *le seul arc compris entre* $\frac{-\pi}{2}$ *et* $\frac{\pi}{2}$ *dont le sinus vaut* y ».

On aura :

$arcsin\ (sin\, x) = x,\ \ pour\ tout\ x \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $y = sin\ (arcsin\, y)\ \ y \in [-1,1]$

Exemple :

$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-\pi}{6}$

$\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$

$arcsin\ (\sin\frac{3\pi}{4}) \neq \frac{3\pi}{4}\ \left(= \frac{\pi}{4}\right)$

3. Arctan :

   En ce qui concerne la fonction tangente, elle aussi est périodique, donc elle n'est pas injective. De toute façon sur tout intervalle du type $(\frac{-\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ elle est strictement croissante et donc injective. Sa restriction :

   $tan:]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow R$

   $arctan: R \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

   $\tan\,(\arctan x) = x, \qquad \forall x \in R$

   $\arctan\,(\tan x) = x, \qquad \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

   Si $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\Rightarrow \tan(x) = y \ \Leftrightarrow x = \arctan y$

4. Dérivées et représentations graphiques :

   Arc cos :

   Si $x \in [0, \pi]\ \cos x = y \Leftrightarrow x = \arccos y$

   $(arcos\ x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall x \in]-1,1[$

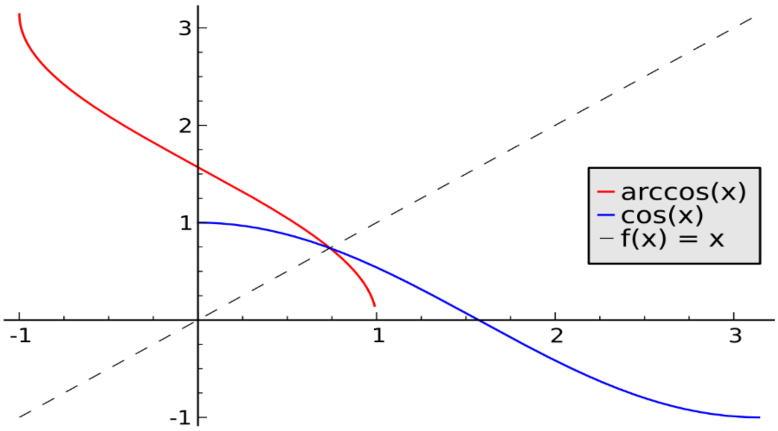
   Preuve :

$\cos(\arccos x) = x \Rightarrow (cos(arccos\ x))' = 1 \Rightarrow -(arccos\ x)'sin\ (arccos\ x)$=1 $\Rightarrow$ $(arccos\,x)'$= $\frac{-1}{\sin\,(\arccos x)}$

Or on a :

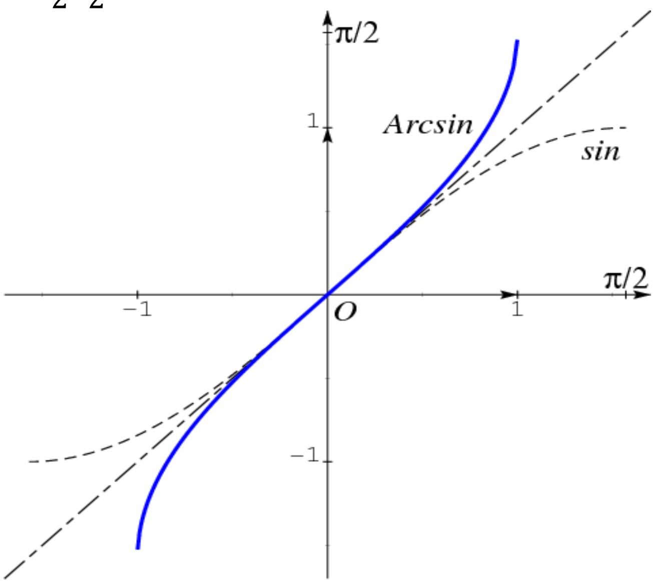
$cos^2 y + sin^2 y = 1$ et $y = \arccos x$ on obtient: $cos^2(\arccos x) + sin^2(\arccos x) = 1$
$sin^2(\arccos x) = 1 - cos^2(\arccos x) \Rightarrow sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$ $(sin(\arccos x) > 0)$

D'où $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$



Arc sin :

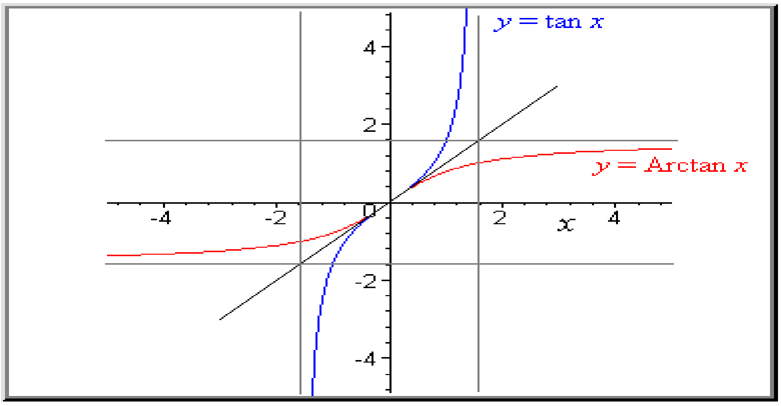
$arcsin$: $[-1,1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



$(arcsin\ x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \forall x \in]-1,1[$

Arc tangente :

La restriction tan: $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow R$ est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction arc tangente. $arctan$: $R \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$



$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ $\forall x \in R$

Applications :

1. Calculer les valeurs de arccos et arcsin en $0, 1$, ½, $\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$. Idem pour $arctan$ en 0, 1, $\sqrt{3}\ et\ \frac{1}{\sqrt{3}}$
2. Calculer arccos $(\cos\frac{7\pi}{3})$, $Arcsin$ $(\sin\frac{7\pi}{3})$, arctan $(\tan\frac{7\pi}{3})$.
3. Calculer cos $(\arctan x), \cos(\arcsin x), \tan(\arcsin x)$.
4. Calculer la dérivée de $f(x) = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

   En déduire que $f(x) = \arcsin x,\ \ \forall x \in]-1,1[$.
5. Montrer que : $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}\ \ \forall x \in [-1,1]$

Fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses

I. Définition

D'après l'identité d'Euler :

$\cos x = Re\left(e^{ix}\right)$

$sin\ x = Im\ (e^{ix})$

$on\ a$: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

Et $e^{-ix} = e^{i(-x)} = \cos(-x) + isin(-x) = \cos x - i \sin x$

Donc e^{ix} $est\ le\ conjugué\ de\ e^{-ix}$

D'où :

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\text{i} \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$$

Remplaçons x par ix

$$\cos(ix) = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2}$$

$$\text{i} \sin(ix) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

Les fonctions $\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$ est dite *cosinus hyperbolique* ***ch***, $\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$ est appelée *sinus hyperbolique* ***sh****.*

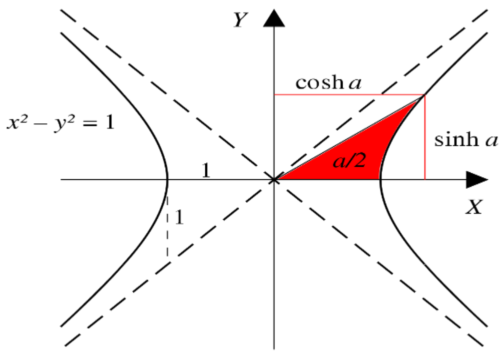
Remarque :

L'identité remarquable pour les fonctions trigonométriques (circulaires) :

$cos^2x + sin^2x = 1$ ($équation\ du\ cercle$: $X^2 + Y^2 = 1$).

Cas hyperbolique :

On a : $ch^2x - sh^2x = 1 \Rightarrow X^2 - Y^2 = 1\ et\ X \geq 0 \Rightarrow$ l'équation d'une branche de l'hyperbole d'équation $X^2 - Y^2 = 1$



II. Propriétés

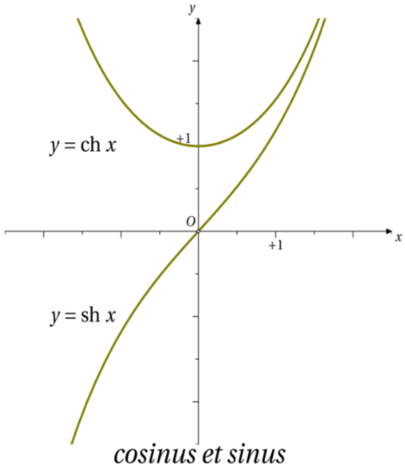
$ch(-x) = \frac{e^{-x}+e^{x}}{2} = ch\ x$, le ***ch*** est pair

$sh(-x) = \frac{e^{-x}-e^{x}}{2} = -sh\ x$, le ***sh*** est impair

$ch'x = sh\ x, \qquad sh'x = ch\ x$

III. Cosinus hyperbolique et son inverse

$ch\ x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$. La restriction $ch: [0, +\infty[\to [1, +\infty[$ est une bijection. Sa bijection réciproque $argch: [1, +\infty[\to [0, +\infty[$



cosinus et sinus hyperboliques

IV. Sinus hyperbolique et son inverse

$$sh\ x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$sh: R \to R$ est une fonction continue dérivable, strictement croissante qui vérifie $\lim_{x\to-\infty} sh\ x = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} sh\ x = +\infty$. Sa bijection réciproque est $argsh : R \to R$

Proposition :

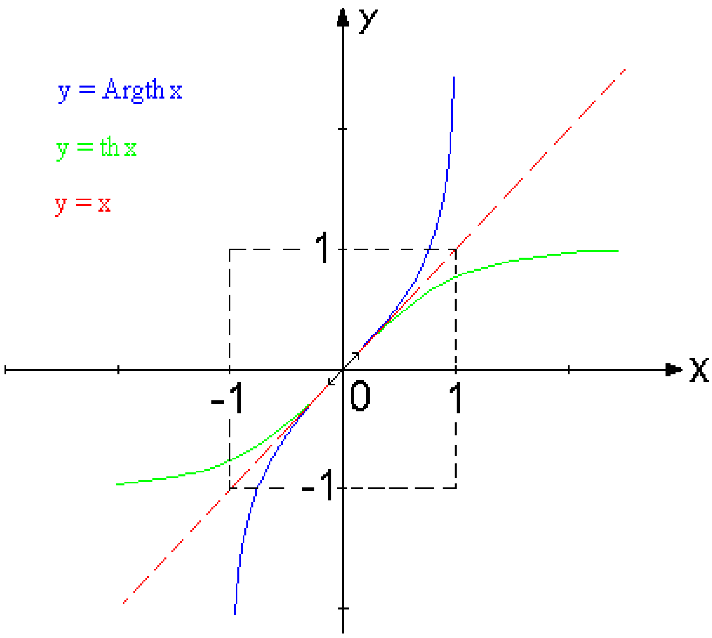
$$argsh'x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$argsh\ x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

V. Tangente hyperbolique et son inverse

La tangente hyperbolique est $th\ x = \frac{sh\ x}{ch\ x}$

La fonction $th: R \to]-1{,}1[$ est une bijection. On note $argth:]-1{,}1[\to R$ sa bijection réciproque.



VI. Trigonométrie hyperbolique

- $ch^2x - sh^2x = 1$
- $ch(a+b) = ch\,a\,ch\,b + sh\,a\,sh\,b$
- $ch\,(2a) = ch^2a + sh^2a = 2\,ch^2a - 1 = 1 + 2sh^2a$
- $sh(a+b) = sh\,a\,ch\,b + sh\,b\,ch\,a$
- $sh(2a) = 2\,sh\,a\,ch\,a$
- $th(a+b) = \frac{th\,a + th\,b}{1 + th\,a\,th\,b}$
- $ch'x = sh\,x$
- $sh'x = ch\,x$
- $th'x = 1 - th^2x = \frac{1}{ch^2x}$
- $argch'x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
- $argsh'x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
- $argth'x = \frac{1}{1-x^2}$